# MONATSAUFGABEN OKTOBER 2006 LÖSUNGEN

**Klasse 5/6 Lösungen**

a) Alle kürzesten Wege sind 4 m lang, und es gibt davon 6 Stück:
ACDGB; ACFGB; ACFIB; AEFIB; AEHIB.

b) Entsprechend sind hier die kürzesten Wege 5 m lang, und es gibt davon 10 verschiedene:
ACDEIB; ACDHIB; ACDHLB; ACGHIB; ACGHLB; ACGKLB; AFGHIB; AFGHLB; AFGKLB; AFJKLB.
Man sieht hier gut, dass jeder Weg aus drei waagerechten Teilen und zwei senkrechten Teilen besteht und dass B genau in der Hälfte der Fälle von links und von unten erreicht wird.

c) Beim Würfel haben alle kürzesten Wege die Länge von 3 m, und es gibt davon wieder sechs:
ADFB; ADHB; ACGB; ACHB; AEFB; AEGB.

**Klasse 7 Lösungen**

Ein Wanderer geht in einer Minute (4500 : 60 = ) 75 Meter. Der Radfahrer fährt in einer Minute die 5-fache Strecke, demnach 375 Meter. Der Abstand zwischen beiden verringert sich in jeder Minute also um 450 Meter. Wegen 2700 : 450 = 6 begegnen die beiden sich nach 6 Minuten, sind also nach 12 Minuten wieder 2,7 km voneinander entfernt.

**Klasse 9/10 Lösungen**

Durch Gruppieren und Faktorisieren erhält man für die linke Seite der Gleichung

$$x^6 + 2x^5 - x^4 - 4x^3 - x^2 + 2x + 1$$
$$= x^4(x^2-1) + 2x^3(x^2-1) - 2x(x^2-1) - (x^2-1)$$
$$= (x^2-1)(x^4 + 2x^3 - 2x - 1)$$

Der erste Faktor des Produktes ist gleich Null für +1 und –1. Der zweite Faktor lässt sich weiter umformen:

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 1$$
$$= (x^4-1)(x^2+2x+1)$$
$$= (x^2-1)(x+1)^2$$

Die gegebene Gleichung hat also genau die Lösungen +1 und –1.

**Klasse 8 Lösungen**

a) Der kleinere Würfel habe die Kantenlänge x cm. Dann beträgt die Kantenlänge des anderen Würfels (x + 22) cm. Hieraus folgt, dass die (Maßzahlen der ) Oberflächeninhalte $6x^2$ bzw. $6(x+22)^2$ betragen.
Nach Voraussetzung gilt daher $6(x+22)^2 - 6x^2 = 19\,272$. Durch Umformen ergibt sich x = 62. Folglich haben die Würfel die Kantenlängen 62 cm und 84 cm.

b) Der kleinere Würfel habe die Kantenlänge x cm und der größere habe die Kantenlänge y cm. Wenn einpaar (x,y) die Bedingung erfüllt, dass sich die Oberflächeninhalte der Würfel um 19 272 cm ² voneinander unterscheiden, dann gilt $6y^2 - 6x^2 = 19\,272$. Wenn man diese Gleichung durch 6 dividiert, und die linke Seite in ein Produkt umformt, erhält man (y – x)(y + x) = 3 212.
Wegen $3212 = 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 73$ und da (y – x) kleiner ist als (y + x) ergeben sich folgende Zerlegungsmöglichkeiten:
$3212 = (y-x)(y+x) = 1 \cdot 3212 = 2 \cdot 1606 = 4 \cdot 803 = 11 \cdot 292 = 22 \cdot 146 = 44 \cdot 73$ .
Wegen (y – x) + (y + x ) = 2y lässt sich für jeden dieser Fälle y und daraus auch x ermitteln.
Nun muss noch nachgewiesen werden, dass die ermittelten fünf Zahlenpaare (x,y) die Bedingung $6y^2 - 6x^2 = 19\,272$ tatsächlich erfüllen. Die Herleitung der möglichen Lösungen sowie der Nachweis, dass es tatsächlich Lösungen sind, wird in folgender Tabelle festgehalten.

| y - x | 1 | 2 | 4 | 11 | 22 | 44 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y + x | 3212 | 1606 | 803 | 292 | 146 | 73 |
| y | 1606,5 | 804 | 403,5 | 151,5 | 84 | 58,5 |
| x | 1605,5 | 802 | 399,5 | 140,5 | 62 | 14,5 |
| $6y^2$ | 15 485 053,5 | 3 878 496 | 976 873,5 | 137 713,5 | 42 336 | 20 533,5 |
| $6x^2$ | 15 465 781 ,5 | 3 859 22 | 957 601,5 | 118 441,5 | 23 064 | 1261,5 |
| $6y^2 - 6x^2$ | 19 272 | 19272 | 19272 | 19272 | 19272 | 19272 |

Es gibt zwei Lösungen. Die Kantenlängen der Würfel betragen 802 cm und 804 cm oder 62 und 84 cm.