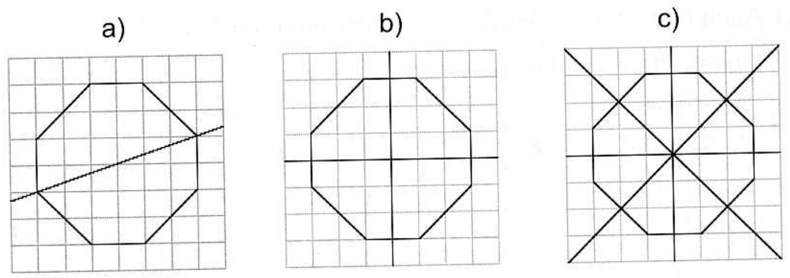
Monatsaufgaben März 2008
Lösungen

Klasse 5/6

Von den 33 Münzen besitzen 32 Münzen dieselbe Masse. Die gezinkte Münze kann beispielsweise aus folgende Weise gefunden werden: Zunächst wird eine der 33 Münzen beiseite gelegt und die beiden verbliebenen Sechzehnermengen weren gegeneinander aufgewogen. Ist die Waage dabei im Gleichgewicht, ist die vorher entfernte Münze als Fälschung entlarvt. Anderenfalls wird eine der beiden Sechzehnermenge in zwei Achtermengen zerlegt und diese werden wiederum gegeneinander aufgewogen. Ist die Waage dabei im Gleichgewicht, befindet sich die Fälschung in der anderen Sechzehnermenge. Darüber hinaus ist klar, ob die Fälschung leichter oder schwerer ist als die echten Münzen. Deshalb genügt es in diesem Fall, die Sechzehnermenge in zwei Achtermengen zu zerlegen und diese gegeneinander aufzuwiegen, die entsprechende Achtermenge erneut zu Halbieren und auszuwiegen usw. Spätestens nach 6 Wägungen ist die Fälschung identifiziert.

Klasse 7/8



d) Nennt man die gefragte Seitenkantenlänge beim Achteck ℓ. Zunächst erkennt man, dass sich das Achteck sinnvoll in fünf Quadrate der Seitenlänge ℓ und vier rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke, die sich paarweise wieder zu je einem Quadrat mit der Seitenlänge ℓ zusammenschieben lassen, zerlegen lässt. Die Fläche des Achtecks ist damit $F = 7 \cdot \ell^2$.

Die Ergebnisse für ℓ können nun der folgenden Tabelle entnommen werden.

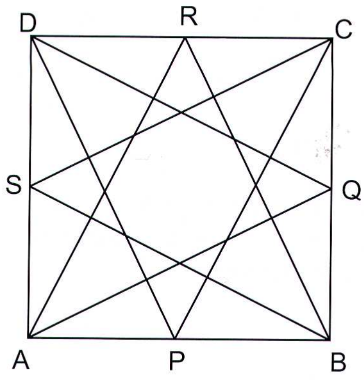
Fall	Zahl der Teilflächen	Gesamtflächeninhalt F	$\ell^2 = \frac{1}{7}F$	ℓ
a)	2	$2 \cdot 56 = 112$ (cm²)	16 cm²	4 cm
c)	8	$8 \cdot 56 = 448$ (cm²)	64 cm²	8 cm

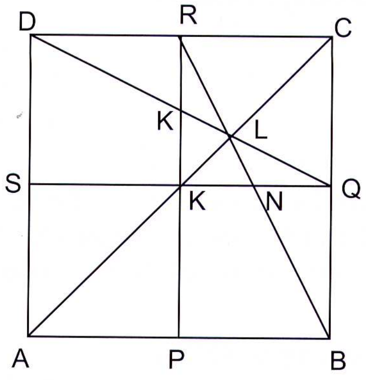
Klasse 9/10

Ein möglicher Nachweis:

Die Seitenlänge des Quadrates sei a. Die Mittelparallelen $\overline{SQ}$ und $\overline{PR}$ werden von ihrem Schnittpunkt M halbiert. Deshalb folgt aus der Strahlensatzfigur RMPBN:

$$|MK| = \frac{1}{2}|SD| = \frac{1}{4}a.$$





Das Dreieck MNR hat also den Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} = \frac{a^2}{16}$ .Entsprechend ist

$$|MK| = \frac{1}{2}|SD| = \frac{1}{4}a \qquad und \qquad |KR| = \frac{1}{4}a\,.$$

Da die Dreiecke KML und RKL außerdem in der von L ausgehenden Höhe übereinstimmen, haben sie denselben Flächeninhalt. Da die Gesamtfigur achsensymmetrisch bzgl. der Diagonalen $\overline{AC}$ ist, sind die Dreiecke KML und LMN kongruent. Jedes der Dreiecke RKL, KML und LMN hat also den Flächeninhalt $\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{16}$ Das Achteck besteht aus 8 zu KML kongruenten Dreiecken, hat also den Flächeninhalt $\frac{a^2}{6}$. Der Anteil des Achtecks am Flächeninhalt des Quadrates beträgt demzufolge $\frac{1}{6}$.

Weitere mögliche Nachweise können über Kongruenz von anderen Teildreiecken und deren Flächeninhalten auch ohne die Strahlensätze zur Hilfe zu nehmen geführt werden.