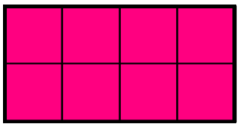
MONATSAUFGABEN FEBRUAR 2008
LÖSUNGEN

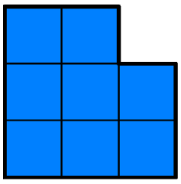
Klasse 5/6

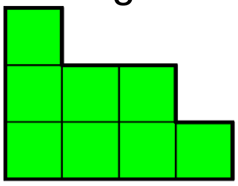
a) Der Umfang eines Oktominos kann
12, **14** , **16** oder **18** cm betragen.

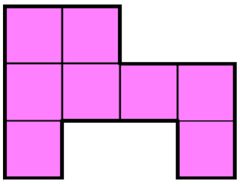
b) Es können **4**, **6**, **8**, **10**, **11**, **12**, **13**, **14** oder **16** Ecken
bei einem Oktomino vorkommen.

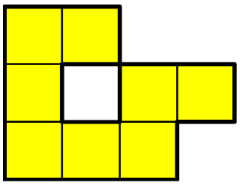
Erklärung: Die folgende Auswahl von Oktominos zeigt beispielhaft alle möglichen Eckenzahlen und Umfänge.

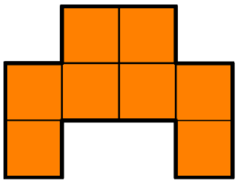

4 Ecken,12 cm Umfang

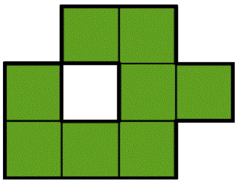

6 Ecken,12 cm Umfang

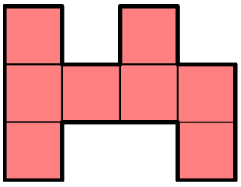

8 Ecken,14 cm Umfang

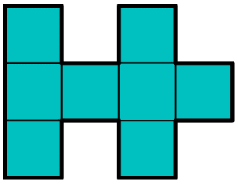

10 Ecken,16 cm Umfang


11 Ecken,18 cm Umfang


12 Ecken,16 cm Umfang


13 Ecken,18 cm Umfang


14 Ecken,18 cm Umfang


16 Ecken,18 cm Umfang

Anmerkung: Es gibt insgesamt 369 verschiedene Oktominos, wenn man Drehungen und Spiegelungen außer Acht lässt. Sechs davon haben ein Loch, unter diesen findet sich auch das einzige Oktomino mit 13 Ecken!

Klasse 7/8

Das „Wasser des Atlantiks“ kann genutzt werden*

- zur Wiederholung der Volumenrechnung,
- zur Übung des Rundens (von Dezimalzahlen),
- zur Einübung sinnvollen Umgangs mit gegebenen und berechneten Daten.

Justus‘ Angabe bedeutet $528\,336\,944\,762\,379\ \text{hl} = 52\,833\,694\,476\,237{,}9\ \text{m}^3 =$
$52\,833{,}694\,476\,237\,9\ \text{km}^3 \approx 52\,834\ \text{km}^3 \approx 53\,000\ \text{km}^3$.

Der Atlantik soll also rund 53 Tausend km^3 Wasser enthalten.

Jeden Tag verdunsten riesige Mengen Meerwasser. Genauso riesige Mengen Wasser kommen durch Flüsse und durch Regen über dem Meer wieder dazu. Bei so großen Schwankungen am Tag ist eine Volumenangabe auf Hektoliter genau unsinnig. Das hätte Bob seinem allwissenden Freund sofort entgegnen können.

Volumenberechnung:

a) mit den Längenangaben:
Aus
$l = 150\,000\,\mathrm{km};\ b = 5000\,\mathrm{km}$ oder $b_2 = 3000\,\mathrm{km},\ b_3 = 7000\,\mathrm{km};\ t \approx 4000\,\mathrm{m} = 4\,\mathrm{km}.$
ergibt sich $V = l \cdot b \cdot t = 300\,000\,000\,\mathrm{km}^3$: Das Volumen liegt zwischen $200\,\mathrm{Mio.\,km}^3$ und $400\,\mathrm{Mio.\,km}^3$.

b) mit den Flächenangaben:
Aus $A_1 \approx 80\,\mathrm{Mio.\,km}^2,\ A_2 \approx 110\,\mathrm{Mio.\,km}^2,$
ergibt sich $V_1 = A_1 \cdot t = 80\,\mathrm{Mio.} \cdot 4\,\mathrm{km}^3 = 320\,\mathrm{Mio.\,km}^3$ und
$V_2 = A_2 \cdot t = 110\,\mathrm{Mio.} \cdot 4\,\mathrm{km}^3 = 440\,\mathrm{Mio.\,km}^3$: Das Atlantikvolumen liegt zwischen $320\,\mathrm{Mio.\,km}^3$ und $440\,\mathrm{Mio.\,km}^3$.

Insgesamt liegt das Wasservolumen liegt damit etwa bei $300\,\mathrm{Mio.\,km}^3$. Die Zahl von Justus ist also viel zu klein, etwa um den Faktor 6000. Er hat sich wohl nur einfach irgendeine große Zahl ausgedacht und gehofft, dass keiner Bescheid weiß und protestieren kann.

Klasse 9/10

Zunächst muss man eine Quadratzahl beliebig wählen, z. B. 4, und diese dann zerlegen: $4 = 4 \cdot 1 = 2 \cdot 2$. Die zweite Zerlegung kommt nicht infrage, da die Faktoren $c + b$ und $c - b$ verschieden sein müssen. Denn die Aufgabe enthält *implizit* durch den Hinweis auf den Satz des PYTHAGORAS die Bedingung, dass $a,\ b,\ c \neq 0$ sein müssen.

Nun müssen b und c so bestimmt werden, dass $c + b = 4$ und $c - b = 1$ ist. Das ist durch Probieren (ganze Zahlen!) möglich oder durch Ausrechnen nach dem Additionsverfahren. Die Gleichungen kann man aber auch so deuten, dass man von einem Punkt c der Zahlengeraden um die *gleiche* Strecke b nach rechts und links gehen soll, um zu 4 bzw. 1 zu gelangen. Das heißt, c liegt in der Mitte des Intervalls von 1 bis 4 und b ist dessen halbe Länge, $c = 2{,}5;\ b = 1{,}5$.

Das Ergebnis zeigt, dass *ganzzahlige* Lösungen nur dann auftreten, wenn beide Faktoren entweder gerade oder ungerade sind. Damit liefert 16 das erste neue Beispiel mittels der Zerlegung $16 = 8 \cdot 2$. Es folgt $c = 5$ und $b = 3$, also nichts wirklich Neues. Das ist erst bei $25 = 25 \cdot 1$ mit $c = 13$ und $b = 12$ der Fall.

Weitere Beispiele in systematischer Reihenfolge:

1) $36 = 18 \cdot 2 \Rightarrow c = 10,\ b = 8$
2) $49 = 49 \cdot 1 \Rightarrow c = 25,\ b = 24$
3) $64 = 32 \cdot 2 \Rightarrow c = 17,\ b = 15$
4) $ = 16 \cdot 4 \Rightarrow c = 10,\ b = 6$
5) $81 = 81 \cdot 1 \Rightarrow c = 41,\ b = 40$
6) $ = 27 \cdot 3 \Rightarrow c = 15,\ b = 12$
7) $100 = 50 \cdot 2 \Rightarrow c = 26,\ b = 24$

Man erkennt, dass nicht alle Beispiele zu wirklich neuen Ergebnissen führen: 1), 4) und 6) gehen durch Multiplikation mit 2 bzw. 3 aus dem Zahlentripel $(3, 4, 5)$ hervor, analog 7) aus $(5, 12, 13)$. Klar ist, dass man auf diese Weise *alle* pythagoreischen Zahlentripel erhält, da für jedes eine solche Darstellung möglich ist.

Um pythagoreische Quader zu finden, schreibt man analog $a^2 + b^2 = (d+c)\cdot(d-c)$. Wählt man nun zwei Quadratzahlen a^2 und b^2, so kann man wie oben weitermachen:

$$a = 1,\;\; b = 2,\;\; a^2 + b^2 = 5 = 5\cdot 1 \quad\Rightarrow\quad d = 3,\;\; c = 2$$
$$a = 2,\;\; b = 2,\;\; a^2 + b^2 = 8 = 4\cdot 2 \quad\Rightarrow\quad d = 3,\;\; c = 1.$$

Man kann also zwei Kantenlängen eines Quaders, die nicht beide 1 sind, beliebig vorgeben, um einen Quader zu erhalten, dessen dritte Kante und dessen Raumdiagonale ganzzahlig sind.

Bemerkung: Man kann die obige Methode auch umkehren, indem man von b und c ausgeht. Dann muss man jedoch im Falle der pythagoreischen Tripel sicherstellen, dass $(b+c)\cdot(b-c)$ eine Quadratzahl ist. Dies erreicht man im einfachsten Fall dadurch, dass man $b+c = p^2$ und $b-c = q^2$ setzt, also $c = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ und $b = \frac{1}{2}(p^2 - q^2)$. Da aber jetzt bei beliebiger Wahl von p und q die Ganzzahligkeit von b und c nicht mehr gewährleistet ist, liegt es nahe $c = m^2 + n^2$ und $b = m^2 - n^2$ zu setzen. Dann ist $b + c = 2m^2$ und $b - c = 2n^2$, also $a^2 = 4m^2n^2$ und $a = 2mn$. Hiermit hat man die klassische Erzeugung der pythagoreischen Zahlentripel aus der dritten binomischen Formel gewonnen.